

第七届全国空间轨道设计竞赛甲组题目

朱小龙¹、王文彬²、高扬³
中国科学院空间应用工程与技术中心

1. 问题描述

第七届全国空间轨道设计竞赛甲组题目的背景设定为不规则形状小行星（Eros 433 小行星，如图 1 所示）表面巡游探测（以及小行星重力场精密探测）任务。该任务由 1 颗探测器和 3 颗完全相同的机器人在 30 天内协同完成。初始时刻，探测器携带机器人从远处接近小行星。此后，探测器在小行星附近的安全区域（定义见后文中的图 4）飞行，不着陆小行星表面。3 颗机器人在任务期限内由探测器依次择机释放，然后自主飞往小行星表面实现软着陆，并在着陆点（及其附近区域）开展不少于 2 天的探测活动，对该着陆点的探测完成后，机器人可以飞往其它区域继续实施探测。期望通过合理设计探测器和 3 颗机器人的飞行轨道，从而使得机器人所能探测的小行星表面区域最大化，并设法让探测器与 3 颗机器人的总燃料消耗质量最小化。探测器与机器人在飞行过程中不考虑碰撞问题。



图 1 Eros 433 小行星

2. 设计指标和评价标准

将 Eros 433 小行星表面用一系列三角形平面近似，如图 2 所示。数据文件 Eros433.txt 中给出了所有三角形的顶点（ v ）及其在小行星固联坐标系（定义见

¹ 博士研究生（中国科学院大学），zhuxiaolong11@csu.ac.cn

² 高级工程师，wangwenbin@csu.ac.cn

³ 研究员，gaoyang@csu.ac.cn

3.2 节)中的坐标位置以及各个三角形平面(f)的顶点编号,文件 Eros433_label.txt 是对 Eros433.txt 的进一步说明。为简化飞行轨道的优化设计,机器人仅考虑在顶点软着陆,并且在该顶点的停留时间不少于 2 天,即完成对该顶点(及其附近区域)的探测,并记入 1 分,此后机器人可以从该顶点起飞抵达其它顶点继续实施探测。新的探测顶点与所有此前已计分的顶点之间的距离(顶点间的距离矩阵见文件 distance.txt,顶点间距离定义为表面最短路径而非空间直线)均不得小于 5 km,否则对该顶点的探测不计分。在顶点处软着陆与起飞的定义见后文 4.2 节的描述。

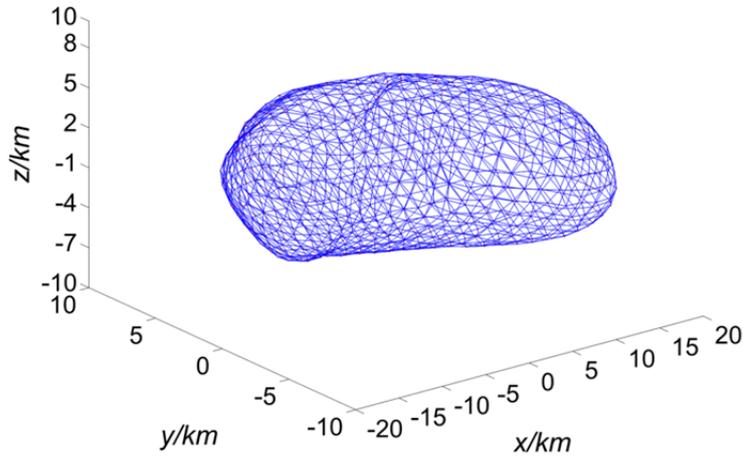


图 2 Eros 433 小行星的多面体模型,包含 856 个顶点与 1708 个三角形平面

第一设计指标定义为最大化 3 颗机器人成功实施探测的顶点数目(或对顶点探测所计的分数)之和:

$$J_1 = \sum_{i=1}^3 v_i \quad (1)$$

式(1)中, v_i 表示第 i 颗机器人成功实施探测的顶点数目。

当第一设计指标(J_1)相同时,第二设计指标定义为最小化探测器与 3 颗机器人的总燃料消耗质量:

$$J_2 = \Delta m_s + \sum_{i=1}^3 \Delta m_i \quad (2)$$

式(2)中, Δm_s 表示探测器的燃料消耗质量 (kg), Δm_i 表示第 i 颗机器人的燃料消耗质量 (kg)。如果两组结果的设计指标(J_2)相差 0.1%之内,认为该两组结果的设计指标相同。

3. 动力学模型

3.1. 小行星附近的引力势与引力加速度

根据文献[1]，给定场点 \mathbf{r} （探测器或机器人的位置矢量），该点处的引力势能函数为

$$U = \frac{1}{2}G\sigma \sum_{e \in edges} \mathbf{r}_e \cdot (\mathbf{E}_e \mathbf{r}_e) \cdot L_e - \frac{1}{2}G\sigma \sum_{f \in faces} \mathbf{r}_f \cdot (\mathbf{F}_f \mathbf{r}_f) \cdot \omega_f \quad (3)$$

由式(3)可得到场点 \mathbf{r} 处的引力加速度：

$$\mathbf{a}_{433} = \nabla U = -G\sigma \sum_{e \in edges} \mathbf{E}_e \mathbf{r}_e L_e + G\sigma \sum_{f \in faces} \mathbf{F}_f \mathbf{r}_f \omega_f \quad (4)$$

式(3)和(4)中， G 为万有引力常数， σ 为 Eros 433 小行星的密度 $2.67 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。
 $e \in edges$ 表示棱边（三角形的边）， \mathbf{r}_e 表示从场点 \mathbf{r} 到棱边 e （或其延长线）上任意一点的距离矢量； $\mathbf{E}_e = \hat{\mathbf{n}}_A (\hat{\mathbf{n}}_{12}^A)^T + \hat{\mathbf{n}}_B (\hat{\mathbf{n}}_{21}^B)^T$ （ 3×3 矩阵），其中 $\hat{\mathbf{n}}_f$ ($f = A, B$) 为三角形平面 f （位于棱边两侧的两个三角形平面）的外法线方向单位矢量，该矢量垂直于三角形平面 f ，正向从坐标原点指向 f ， $\hat{\mathbf{n}}_{12}^A, \hat{\mathbf{n}}_{21}^B$ 分别表示棱边 e_{12}, e_{21} （ e_{12} 和 e_{21} 表示同一条棱边）的法线方向单位矢量，分别位于三角形平面 A 和 B 内并由三角形的第 3 个顶点（不在棱边上的顶点）指向棱边 e_{12}, e_{21} ，如图 3 所示； L_e 为线势能（Potential of a wire），由下式计算得到：

$$L_e = \ln \frac{a+b+p}{a+b-p} \quad (5)$$

式(5)中， a 和 b 为场点 \mathbf{r} 到棱边两个顶点（顶点 1 和顶点 2）的距离， p 为棱边 e_{12}, e_{21} 的长度。

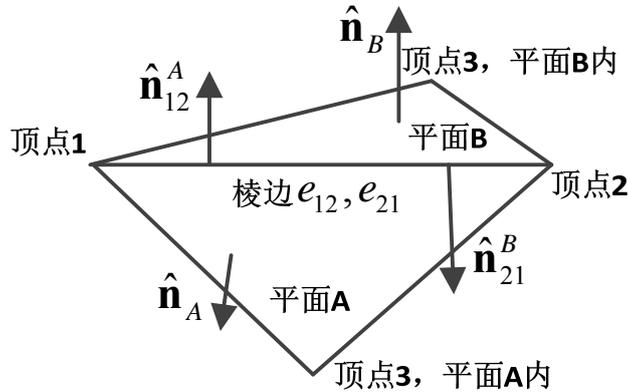


图 3 三角形平面外法线方向矢量与棱边法线方向矢量示意图

式(3)和(4)中， $f \in faces$ 表示三角形平面， \mathbf{r}_f 表示从场点 \mathbf{r} 到三角形平面上任意一点的距离矢量； $\mathbf{F}_f = \hat{\mathbf{n}}_f (\hat{\mathbf{n}}_f)^T$ (3×3 矩阵)； ω_f 为带符号的立体角 (signed solid angle)，由下式计算得到：

$$\omega_f = 2 \arctan \frac{\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)}{r_1 r_2 r_3 + r_1 (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3) + r_2 (\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_1) + r_3 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)} \quad (6)$$

式(6)中， $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 和 \mathbf{r}_3 分别表示场点 \mathbf{r} 到三角形三个顶点的距离矢量， r_1, r_2 和 r_3 分别为 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 和 \mathbf{r}_3 的模值。

3.2. 小行星附近的轨道运动方程

假设 Eros 433 小行星质量分布均匀，并相对惯性空间具有一个恒定的自旋角速度 $n = 3.3117 \times 10^{-4}$ rad/s。定义 Eros 433 小行星的固联坐标系如下：坐标原点位于 Eros 433 小行星质心，坐标系的 z 轴与小行星自旋轴重合，正向指北； x 轴指向小行星的本初子午线、 y 轴按右手坐标系确定。探测器（或机器人）相对 Eros 433 小行星的运动仅考虑 Eros 433 小行星的引力作用，不考虑太阳以及其它天体引力的影响。在 Eros 433 小行星固联坐标系中，探测器（或机器人）的运动方程表达如下：

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x = a_{433x} + T_x / m \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y = a_{433y} + T_y / m \\ \ddot{z} = a_{433z} + T_z / m \end{cases} \quad (7)$$

式(7)中，探测器（或机器人）的位置由 x, y, z 表示， $a_{433x}, a_{433y}, a_{433z}$ 分别表示 \mathbf{a}_{433} 的坐标分量， T_x, T_y, T_z 分别为施加在探测器（或机器人）上的推力的坐标分量， m 为探测器（或机器人）的质量。考虑到探测器或机器人在轨道机动过程中所消耗的燃料质量相对其本身的质量来说都是相对较小的，因此认为探测器和机器人的质量始终保持不变，即式(7)中的 m 恒取常值。后文中的运动状态变量均表示在小行星固联坐标系中。

探测器的初始质量为 $m_{s0} = 300$ kg（不含机器人），1 颗机器人的初始质量为 $m_{r0} = 50$ kg。初始时刻，探测器（携带 3 颗机器人）质量为 $m = m_{s0} + 3m_{r0}$ ，探测器在释放第 1、2、3 颗机器人之后，其质量分别为 $m = m_{s0} + 2m_{r0}$ 、 $m = m_{s0} + m_{r0}$ 、 $m = m_{s0}$ 。机器人被释放后，其质量为 $m = m_{r0}$ 。

如果推力利用速度脉冲 $\Delta \mathbf{v} = [\Delta \dot{x} \ \Delta \dot{y} \ \Delta \dot{z}]^T$ 来近似表达，在速度脉冲施加的前后时刻 $(t_{\Delta v}^-, t_{\Delta v}^+)$ ，探测器（或机器人）的位置不发生变化，速度发生瞬时变化：

$$\begin{cases} x(t_{\Delta v}^+) = x(t_{\Delta v}^-), y(t_{\Delta v}^+) = y(t_{\Delta v}^-), z(t_{\Delta v}^+) = z(t_{\Delta v}^-) \\ \dot{x}(t_{\Delta v}^+) = \dot{x}(t_{\Delta v}^-) + \Delta \dot{x}, \dot{y}(t_{\Delta v}^+) = \dot{y}(t_{\Delta v}^-) + \Delta \dot{y}, \dot{z}(t_{\Delta v}^+) = \dot{z}(t_{\Delta v}^-) + \Delta \dot{z} \end{cases} \quad (8)$$

不包含速度脉冲（或连续推力）的飞行轨道仍然遵循式(7)的运动方程，但需设定 $T_x = T_y = T_z = 0$ 。

3.3. 燃料消耗质量

探测器的推进方式有连续与脉冲推进两种，可以选取其中一种推进方式；3 颗机器人仅采用脉冲推进，不采用连续推进。

(1) 连续推进，提供不超过 0.1 N 的推力，推力幅值和方向可任意选择，发动机可任意开启或关闭。在推进过程中，燃料消耗质量的时间变化率 \dot{m} (kg/s) 与燃料消耗质量 Δm (kg，从 t 时刻起算) 计算如下

$$\dot{m} = \frac{T}{g_e I_{sp}}, \Delta m = \int_t^{t+\Delta t} \frac{T}{g_e I_{sp}} \cdot dt \quad (9)$$

式(9)中， $T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}$ 为推力幅值， g_e 为地球海平面的重力加速度， I_{sp} 为推进比冲 ($I_{sp} = 1000$ s)， Δt 为连续推力的持续时间。

(2) 脉冲推进，速度脉冲的大小和方向可任意选择，脉冲作用时刻和脉冲次数没有限制。每次脉冲推进后，燃料消耗质量 (kg) 为

$$\Delta m = m \left(1 - e^{-\frac{\Delta v}{g_e I'_{sp}}} \right) \quad (10)$$

式(10)中， m 为探测器（或机器人）的初始质量（恒取常值，见 3.2 节的相关描述）， Δv 为脉冲速度大小， $I'_{sp} = 300$ s。

4. 约束条件描述

(1) 初始状态约束

记初始时刻 $t_0 = 0$ ，在小行星固联坐标系中，探测器携带 3 颗机器人位于半径 $R = 100$ km 的球面上（以坐标原点为圆心），速度为 0。位置误差不超过 1 m，速度误差不超过 0.001 m/s。

(2) 飞行路径约束

考虑到探测器的安全，定义半轴分别为 40 km, 30 km 和 20 km 的椭球面，如图 4 所示。探测器在飞行过程中不能飞入安全椭球面，否则，探测器还未释放的机器人不能再被释放。设探测器在固联坐标系中的位置分量分别为 x_s, y_s, z_s ，则在任意时刻，均需要保证（位置误差不超过 1 m）

$$\frac{x_s^2}{40^2} + \frac{y_s^2}{30^2} + \frac{z_s^2}{20^2} - 1 \geq 0 \quad (11)$$

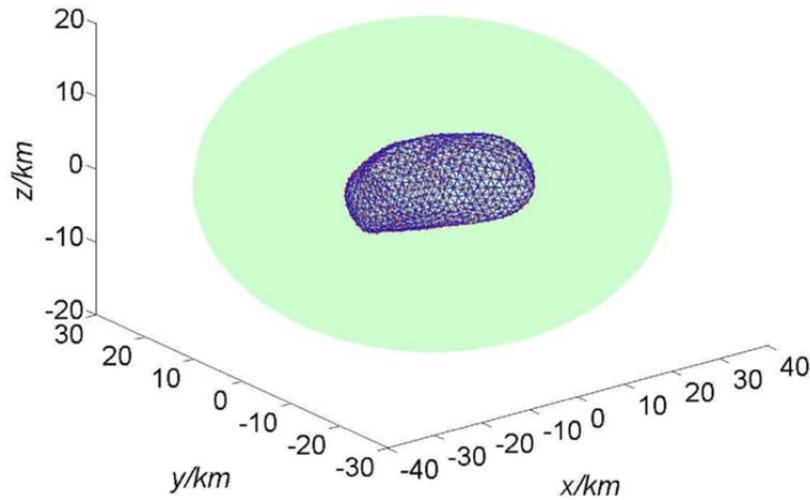


图 4 安全椭球面（探测器安全飞行区域需在椭球面之外）

机器人在飞行过程中，不能撞上小行星表面。否则，该机器人不能继续实施探测。给定任意位置矢量 \mathbf{r} （等效为一个场点），可以通过计算下式（具体计算已由式(6)给出）判断该点是否位于多面体的外部：

$$\sum_{f \in \text{face}} \omega_f = \begin{cases} 4\pi, & \text{场点在小行星内部} \\ 0, & \text{场点在小行星外部} \\ 2\pi, & \text{场点在小行星表面} \end{cases} \quad (12)$$

因此，对于机器人的轨道数据，可以逐点计算式(12)，如果某一时刻轨道数据对应的计算值为 2π 并且速度不为 0（速度误差不超过 0.001 m/s）或者计算值为 4π ，即可认为机器人已撞上小行星表面，该机器人探测任务结束。

(3) 机器人软着陆与起飞约束

机器人软着陆与起飞时刻，机器人的速度为 0，着陆（或起飞）位置如下设定：三个坐标分量相对顶点分别向外偏移 100m，距离顶点约 173m，着陆（或起飞）位置的坐标已记录在文件 landing_v.txt。末端降落与表面附着不再具体设计，

也不考虑燃料消耗。机器人在某一顶点着陆后至再次起飞期间，与小行星保持相对静止状态。位置误差不超过 1 m，速度误差不超过 0.001 m/s。

(4) 时间范围约束

探测器释放机器人的时间间隔（即释放第 1、2 颗、释放第 2、3 颗机器人的时间间隔）不少于 1 天，释放第 1 颗机器人的时刻可任意选取；机器人在着陆顶点的停留时间不少于 2 天；机器人每次从一个顶点转移到另一个顶点的时间不少于 0.25 天，总任务期限不多于 30 天，从初始时刻起算 30 天之后的顶点探测均不再计分。时间误差不超过标称值的 0.1%。

(5) 机器人释放约束

机器人释放时刻，机器人与探测器具有相同的位置和速度。位置误差不超过 1 m，速度误差不超过 0.001 m/s。

(6) 燃料消耗质量约束

探测器和机器人所能携带的燃料消耗质量不能超过其本身质量的 10%，即探测器燃料消耗质量不超过 30 kg，1 颗机器人燃料消耗质量不超过 5 kg。质量误差不超过 0.001 kg。

5. 结果提交要求

(1) 以 PDF 或 word 形式提供一份技术说明文档。该文档简要介绍你所用的方法并列出设计结果，设计结果中至少应该包括如下信息：设计指标、所采用的推进方式、探测器初始位置、机器人释放时刻以及相应的位置与和速度、探测顶点信息（顶点编号、着陆时刻、起飞时刻）、燃料消耗量等。同时，设计者需提供飞行轨道图。

(2) 小行星固联坐标系中的探测器轨道数据文件（sc.txt）和机器人轨道数据文件（rob1.txt, rob2.txt, rob3.txt，对应 1-3 号机器人）。请按顺序依次从第 1 列至第 11 列给出时间（单位 days）、位置（ x, y, z 三个方向，单位 km）、速度（ x, y, z 三个方向，单位 km/s）、连续推力（ x, y, z 三个方向，单位 N）或速度脉冲（ x, y, z 三个方向，单位 km/s）和燃料消耗质量（ Δm ，单位 kg）。所有数据均以双精度类型给出。数据格式请参见所提供的示例文件。

探测器轨道数据的时间范围从 t_0 时刻到释放第 3 颗机器人时刻，之后的数据无需给出， t_0 设置为 0，其后时间按天计。每个机器人从被探测器释放时刻起给

出轨道数据，直至其探测任务结束，如果有机器人未被释放，则不需要给出其轨道数据。

常数定义

万有引力常数： $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$

地球海平面的重力加速度： $g_e = 9.80665 \text{ m/s}^2$

1 天 = 86400 s

参考文献

[1] Werner, R.A., Scheeres, D.J. Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of Asteroid 4769 Castalia, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1997, 65, 313-344.