

第七届全国空间轨道设计竞赛乙组题目

朱小龙¹、高扬²

中国科学院空间应用工程与技术中心

1. 问题描述

第七届全国空间轨道设计竞赛乙组题目背景设定为近地轨道卫星编队的构型重构任务，卫星编队及其构型重构对于对地遥感、地球科学、空间操作等领域的应用具有重要意义。假定一颗主星携带 5 颗完全相同的从星运行在高度为 400 km 的近地圆轨道上，利用这 5 颗从星需要构建的目标构型有（4 种）：同轨道跟飞/领飞构型、平面椭圆构型、当地水平面投影圆构型和三维空间圆构型（目标构型定义详见 3.3 节）。根据任务需求，设法每次选择 3 颗从星在主星附近依次构建上述 4 种目标构型，构建目标构型的先后顺序无限制，每种构型建立后需要保持至少 2 天，总任务期限不超过 10 天。期望通过合理设计 5 颗从星的相对飞行轨迹，尽可能构建所有 4 种目标构型，并考虑燃料消耗均衡分配问题。编队构型重构过程中不考虑卫星之间的碰撞。

2. 设计指标和评价标准

第一设计指标定义为在任务周期内构建尽可能多的目标构型（最多 4 种）：

$$J_1 = \max(\xi) \quad (1)$$

式(1)中， ξ 可以取1,2,3,4，表示所构建的目标构型数目。构建目标构型的先后顺序无限制，但重复构建同一种目标构型或目标构型建立后保持未达到 2 天，该构型不计入第一设计指标。

当第一设计指标(J_1)相同时，第二设计指标定义为最小化 5 颗从星中的最大燃料消耗质量：

$$J_2 = \min(\max(\Delta m_i)), i = 1, 2, \dots, 5 \quad (2)$$

式(2)中， Δm_i 表示第*i*颗从星在任务期限内的燃料消耗质量（ 10^{-3} kg）。如果两组结果的设计指标(J_2)相差 0.1%之内，认为该两组结果的设计指标相同。

¹ 博士研究生（中国科学院大学），zhuxiaolong11@csu.ac.cn

² 研究员，gaoyang@csu.ac.cn

3. 动力学模型

3.1. 相对运动方程

为描述从星与主星（主星运行在圆轨道上）之间的相对运动，引入如下的 HCW 坐标系（此命名仅针对后文中的 HCW—Hill-Clohessy-Wiltshire 方程）：坐标系原点 O 位于主星， x 轴由地心指向主星， y 轴在主星轨道面内与 x 轴垂直，沿运动方向为正， z 轴垂直于轨道平面，与 x 、 y 轴构成右手坐标系，如图 1 所示。后文中的运动状态变量均表示在 HCW 坐标系中。

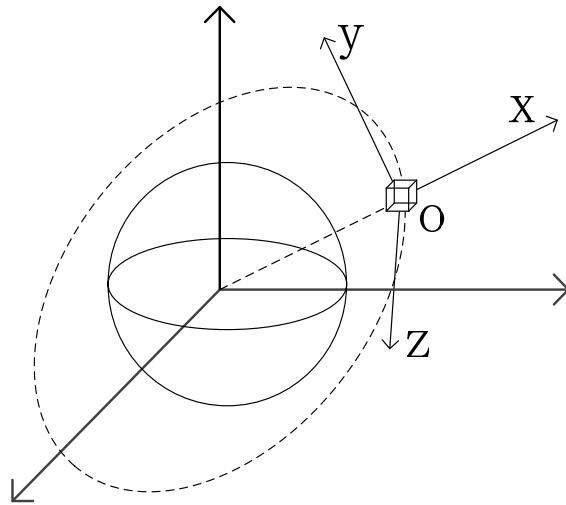


图 1 HCW 坐标系示意图

从星相对主星的线性化相对运动方程（HCW 方程）可表示为如下：

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x = T_x/m \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = T_y/m \\ \ddot{z} + n^2z = T_z/m \end{cases} \quad (3)$$

式(3)中，从星相对主星的位置由 x, y, z 表示， n 为主星的圆轨道角速度， T_x, T_y, T_z 分别表示施加在从星上的推力的坐标分量， m 为从星的质量。考虑到从星在轨道机动过程所消耗的燃料质量相对其本身的质量来说是相对较小的，因此认为从星的质量始终保持不变，式(3)中的 m 恒取为从星的初始质量 $m_0 = 50 \text{ kg}$ 。

如果推力利用速度脉冲 $\Delta \mathbf{v} = [\Delta \dot{x} \ \Delta \dot{y} \ \Delta \dot{z}]^T$ 来近似表达，在速度脉冲施加的前后时刻 $(t_{\Delta v}^-, t_{\Delta v}^+)$ ，从星的位置不发生变化，速度发生瞬时变化：

$$\begin{cases} x(t_{\Delta v}^+) = x(t_{\Delta v}^-), y(t_{\Delta v}^+) = y(t_{\Delta v}^-), z(t_{\Delta v}^+) = z(t_{\Delta v}^-) \\ \dot{x}(t_{\Delta v}^+) = \dot{x}(t_{\Delta v}^-) + \Delta \dot{x}, \dot{y}(t_{\Delta v}^+) = \dot{y}(t_{\Delta v}^-) + \Delta \dot{y}, \dot{z}(t_{\Delta v}^+) = \dot{z}(t_{\Delta v}^-) + \Delta \dot{z} \end{cases} \quad (4)$$

不包含速度脉冲（或连续推力）的飞行轨道仍然遵循式(3)，但需设定 $T_x=T_y=T_z=0$ 。

3.2. 燃料消耗质量

从星的推进方式有以下两种：

(1) 连续推进，从星可以提供不超过 0.08N 的推力，推力幅值和方向可优化选择，发动机可任意开启或关闭；在推进过程中，燃料消耗质量的时间变化率 \dot{m} (kg/s) 与燃料消耗质量 Δm (kg, 从 t 时刻起算) 计算如下

$$\dot{m} = \frac{T}{g_e I_{sp}}, \Delta m = \int_t^{t+\Delta t} \frac{T}{g_e I_{sp}} \cdot dt \quad (5)$$

式(5)中， $T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}$ 为推力幅值， g_e 为地球海平面的重力加速度， I_{sp} 为推进比冲 ($I_{sp}=1000$ s)， Δt 为连续推力的持续时间。

(2) 脉冲推力，速度脉冲的大小和方向可优化选择，脉冲作用时刻和脉冲次数没有限制。每次施加脉冲推力后，燃料消耗质量 (kg) 为

$$\Delta m = m_0 \left(1 - e^{-\frac{\Delta v}{g_e I'_{sp}}} \right) \quad (6)$$

式(6)中， m_0 为从星的初始质量 ($m_0 = 50$ kg)， Δv 为脉冲速度大小， $I'_{sp} = 300$ s。

在最终提交的结果中，5 颗从星必须采用同一种推进方式。

3.3. 3 星编队目标构型

当 $T_x=T_y=T_z=0$ (即不施加任何推力) 时，给定从星 (相对主星) 在初始时刻 ($t=0$) 的位置和速度 $[x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0]$ ，HCW 方程的解为

$$\begin{cases} x(t) = (\dot{x}_0/n) \sin nt - (3x_0 + 2\dot{y}_0/n) \cos nt + 4x_0 + 2\dot{y}_0/n \\ y(t) = (6x_0 + 4\dot{y}_0/n) \sin nt + (2\dot{x}_0/n) \cos nt + y_0 - \\ \quad 2\dot{x}_0/n - (6x_0 + 3\dot{y}_0/n)nt \\ z(t) = z_0 \cos nt + (\dot{z}_0/n) \sin nt \end{cases} \quad (7)$$

将式(7)化为常值项、长期项与周期项之和的形式：

$$\begin{cases} x(t) = x_c + b \sin(nt + \varphi) \\ y(t) = y_c - 3x_c nt / 2 + 2b \cos(nt + \varphi) \\ z(t) = c \sin(nt + \varphi) \end{cases} \quad (8)$$

式(8)中

$$\begin{aligned}
 b &= \sqrt{(\dot{x}_0/n)^2 + (3x_0 + 2\dot{y}_0/n)^2}, \quad c = \sqrt{z_0^2 + (\dot{z}_0/n)^2} \\
 x_c &= 4x_0 + 2\dot{y}_0/n, \quad y_c = y_0 - 2\dot{x}_0/n \\
 b \cos \phi &= \dot{x}_0/n, \quad b \sin \phi = -(3x_0 + 2\dot{y}_0/n) \\
 c \cos \phi &= \dot{z}_0/n, \quad c \sin \phi = z_0
 \end{aligned}$$

由式(8)可知，有界运动（无长期漂移项）的存在条件为 $x_c = 0$ ，即

$$\dot{y}_0 = -2nx_0 \quad (9)$$

根据式(8)中解的不同形式，可以得出以下 4 种目标构型：

（构形 1）同轨道领飞/跟飞

当 $b = 0, c = 0$ 时，不存在周期项运动，此时的构型最简单，为同轨道领飞/跟飞相对轨迹：

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = y_c \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

当 $y_c > 0$ 时，称为领飞；当 $y_c < 0$ 时，称为跟飞。图 2 (a) 是 3 颗从星同轨道领飞/跟飞的目标构型实例，其中： $y_c = -4 \text{ km}, 4 \text{ km}, 8 \text{ km}$ 。

（构形 2）平面椭圆

当 $b \neq 0, c = 0$ 时，不存在轨道面外相对运动，面内轨迹为一个长短半轴比为 2:1 的椭圆，此时

$$\begin{cases} x(t) = b \sin(nt + \phi) \\ y(t) = y_c + 2b \cos(nt + \phi) \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

图 2 (b) 是 3 星平面椭圆目标构型实例，其中： $b = 2 \text{ km}, y_c = -1 \text{ km}$ ，3 颗从星的相位 $(nt + \phi)$ 两两相差 120° （成等角度分布）。

（构形 3）当地水平面投影圆

当 $b \neq 0, c \neq 0$ 时，同时存在轨道面内和轨道面外的相对运动。面内轨迹仍为长短半轴比为 2:1 的椭圆，面外运动则为简谐振动。根据轨道面内外相位角以及振幅比的不同，可以构成多种形状的目标构型。一种常用的目标构型为当地水平面投影圆构型（ $y_c = 0$ ），此时

$$y^2 + z^2 = r^2 = (2b)^2 \quad (12)$$

结合式(8)与式(12)可得

$$\begin{cases} x(t) = b \sin(nt + \varphi) \\ y(t) = 2b \cos(nt + \varphi) \\ z(t) = \pm 2b \sin(nt + \varphi) \end{cases} \quad (13)$$

图 2(c)是 3 星当地水平面投影圆目标构型实例，其中： $b = 4 \text{ km}$ ， $z(t)$ 等号右边取正， $z(t) = 2b \sin(nt + \varphi)$ ，3 颗从星的相位 $(nt + \varphi)$ 均两两相差 120° （成等角度分布）。

（构形 4）三维空间圆

另一种常用的目标构型为三维空间圆构型（ $y_c = 0$ ），此时

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = (2b)^2 \quad (14)$$

结合式(8)与式(14)可得

$$\begin{cases} x(t) = b \sin(nt + \varphi) \\ y(t) = 2b \cos(nt + \varphi) \\ z(t) = \pm \sqrt{3}b \sin(nt + \varphi) \end{cases} \quad (15)$$

图 2(d)是 3 星三维空间圆目标构型实例，其中： $b = 1 \text{ km}$ ， $z(t)$ 等号右边取负， $z(t) = -\sqrt{3}b \sin(nt + \varphi)$ ，3 颗从星的 $(nt + \varphi)$ 项分别相差 $90^\circ, 120^\circ, 150^\circ$ 。

构型 1 指定了 3 颗星所在的位置，哪颗从星排列在前或后没有限制。构型 2-4 仅规定了 3 颗从星之间的相位差，构型形成时刻，每颗从星所在相位角没有限制，3 颗从星也没有排序上的限制。每次构建目标构型的 3 颗从星可以任意选取，未参与构形构建的 2 颗从星在目标构形保持期间的运动没有特定约束，可以机动也可以不机动。

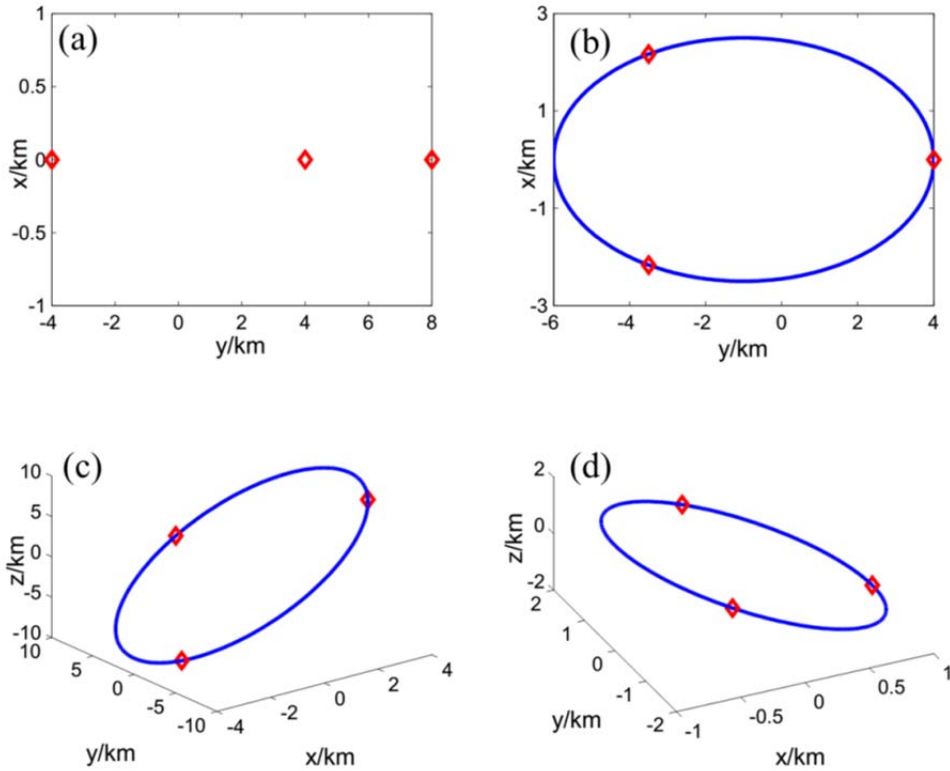


图 2 编队构型示意图

4. 约束条件描述

(1) 初始状态约束

记初始时刻 $t_0 = 0$ (任意一颗从星开始轨道机动的时刻), 在 HCW 坐标系下, 5 颗从星均位于原点, 速度为 0。位置误差不超过 1 m, 速度误差不超过 0.001 m/s。

(2) 时间范围约束

每种目标构型的维持时间不少于 2 天, 总任务周期不多于 10 天 (从 $t_0 = 0$ 起算)。时间误差不超过标称值的 0.1%。

(3) 构型构建精度约束

在构建目标构型时, 式(8)中的构型参数精度约束为: x_c, y_c, b, c 的误差不超过 1m, 3 颗从星在目标构型上相位差的误差不超过 0.1° 。

(4) 燃料消耗约束

每一颗从星所能消耗的燃料质量不能超过 2.5 kg, 质量误差不超过 0.001 kg。

5. 结果提交要求

(1) 以 word 或 PDF 形式提供一份技术说明文档。该文档简单介绍你所用的方法并列出设计结果, 设计结果中至少应该包括如下参数: 设计指标、所采用

的推进方式、目标构型构建信息（次序、时刻与保持时间、所用的从星编号）、燃料消耗质量等。同时，设计者需要提供相对飞行轨迹图。

(2) 从星轨道数据 (sc1.txt, sc2.txt, sc3.txt, sc4.txt, sc5.txt, 分别对应 1-5 号从星)。请按顺序依次从第 1 列至第 11 列给出时间（单位 days）、位置 (x, y, z 三个方向, 单位 km)、速度 (x, y, z 三个方向, 单位 km/s)、连续推力 (x, y, z 三个方向, 单位 N) 或速度脉冲 (x, y, z 三个方向, 单位 km/s) 和燃料消耗质量 (Δm , 单位 kg)。所有数据均以双精度类型给出。数据格式请参见所提供的示例文件。

如果某颗从星从未参与过构建编队，则无需给出其轨道数据。

常数定义

地球海平面的重力加速度: $g_e = 9.80665 \text{ m/s}^2$

主星圆轨道角速度: $n = 0.00113136669468 \text{ rad/s}$

1 天 = 86400 s