

第八届全国空间轨道设计竞赛甲组题目

李明涛¹、于锡峥²

1. 问题描述

人类太空活动的飞速发展，极大地改变了我们的生活，也产生了数量庞大的空间碎片。作为影响航天器安全运行的重要因素，空间碎片的减缓与清理已经成为航天领域的全球性关注问题。第八届全国空间轨道设计竞赛甲组题目是太阳同步轨道空间碎片的多目标交会任务。

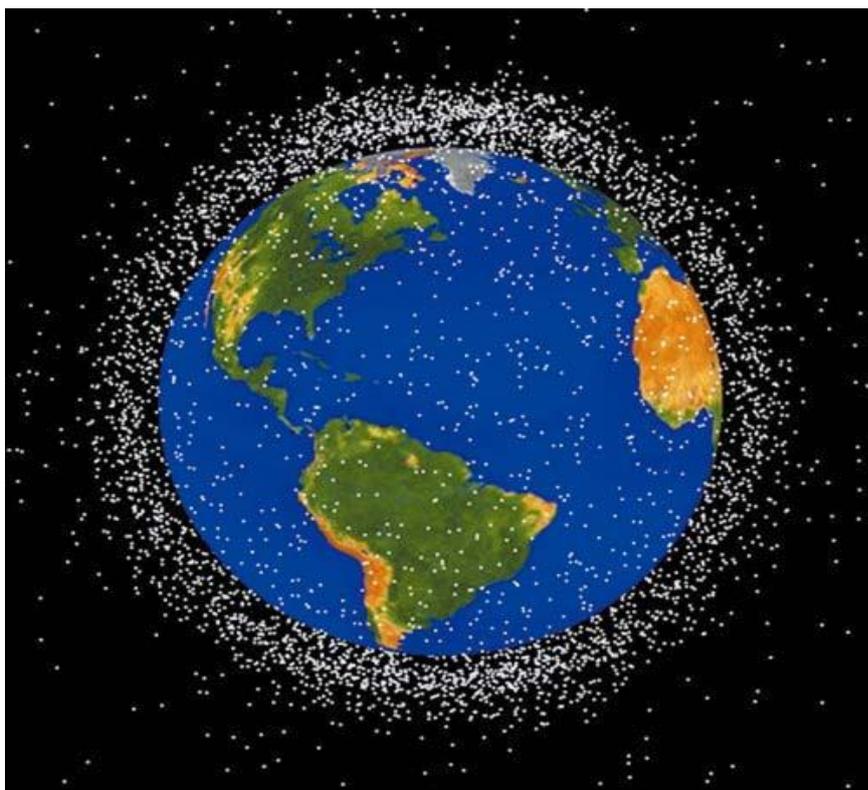


图 1 空间碎片

该任务由一颗空间飞行器在一年内完成。初始时刻飞行器位于

¹ 研究员, limingtao@nssc.ac.cn, 13488752692

² 副研究员, yuxizheng@nssc.ac.cn, 010-62586382

700km 高度的近地圆轨道上。飞行器总重 1000kg，可配置电推进系统、脉冲推进系统或混合推进系统。通过合理地优化设计飞行器的飞行轨迹，对太阳同步轨道上的空间碎片进行交会，交会后停留至少 3600 秒，然后释放重量为 1kg 的碎片减缓装置。

根据交会碎片的雷达反射面积，交会并释放减缓装置后，飞行器获得不同的碎片减缓收益。期望通过合理设计空间飞行器的飞行轨迹，使得碎片减缓收益最大化，并实现良好的时间和燃料性能。飞行器和碎片的轨道动力学模型考虑地球扁率 J2 项的摄动影响。

2. 设计指标和评价标准

第一设计指标定义为空间碎片减缓收益：

$$J_1 = \sum_{i=1}^n v_i \quad (1)$$

n 为交会的空间碎片数量， v_i 等于第 i 个空间碎片的减缓收益。假设碎片的减缓收益等于该碎片的雷达反射面积。空间碎片的轨道数据以及雷达反射面积会随题目一起发布。

当第一设计指标相同时，第二设计指标是最小化飞行器的飞行时间：

$$J_2 = T_f \quad (2)$$

T_f 为从初始时刻到交会最后一颗空间碎片并完成释放碎片减缓装置的飞行时间，单位为天。

第三设计指标为最小化飞行器的燃料消耗：

$$J_3 = \Delta m_{fuel} \quad (3)$$

燃料的单位为公斤 (kg)。

如果两组设计结果的设计指标 (J_1 、 J_2 、 J_3) 相差均在千分之一之内, 认为两组设计指标相同。设计指标的优先级从高到低排列, 分别是 J_1 、 J_2 、 J_3 。

3. 动力学模型

3.1. 理想二体问题下的轨道动力学方程

假设地球是理想的均质球体, 地球的引力场可以简化为质点引力模型, 即假设地球的质量全部集中在球心上。卫星绕质点引力模型下的轨道运动称为理想二体运动。

卫星的轨道运动通常在地球惯性坐标系下描述。地球惯性坐标系的原点在地球的质心, X 轴指向历元时刻的春分点方向, Z 轴指向北极, XYZ 轴构成右手坐标系。在本题目中, 惯性坐标系均指 J2000 坐标系, 即 X 轴指向 TT 时间 2000 年 1 月 1 日 12 时 0 分 0 秒时刻的春分点方向。

在惯性坐标系下, 理想二体的轨道动力学方程如下:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{\mu x}{r^3} \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu y}{r^3} \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{r^3}\end{aligned}\quad (4)$$

其中 μ 为地球引力常数, 飞行器在地心惯性坐标系的位置用 x, y, z 表示, 速度用 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 表示, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 为地心距。(4) 式仅是为了

阐明轨道动力学基本规律，在竞赛求解中不需要用到（4）式。

理想二体问题具有解析解，卫星的轨道运动形状为圆锥曲线，地球位于圆锥曲线的焦点上。对于近地轨道，其形状为圆或椭圆。理想二体问题下卫星轨道运动可以用六个轨道根数描述，如图 2 所示：

a 为轨道的半长轴，代表椭圆轨道的半长轴；

e 为轨道的偏心率，代表轨道的形状；

i 为轨道倾角，代表轨道面与赤道面的夹角；

Ω 为升交点赤经，代表升交点与春分点之间的夹角；

ω 为近地点幅角，代表近地点与升交点之间的夹角；

f 为真近点角，代表卫星当前运行位置与近地点之间的夹角。

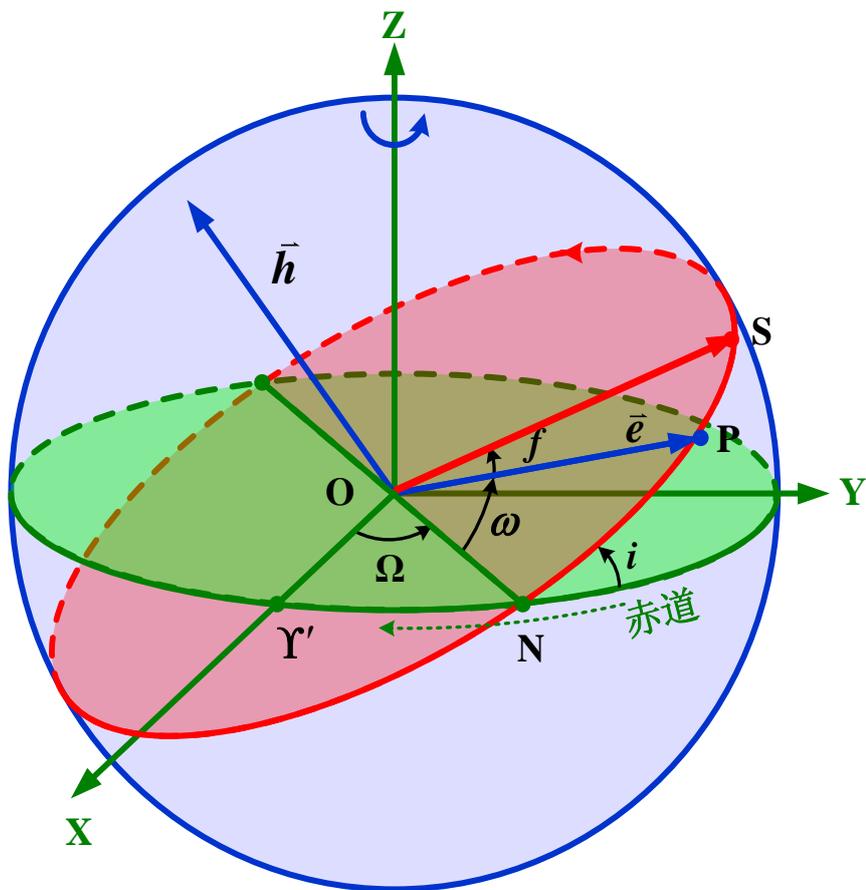


图 2 轨道根数

在理想二体问题模型下，卫星的轨道六根数中， a, e, i, Ω, ω 均为常数，只有真近点角 f 是随时间变化的。

关于轨道根数及轨道根数与位置速度间转换关系，参见附录及参考文献。命题方也会提供轨道根数转化为位置、速度的 MATLAB 源程序，以供参考。

3.2. 地球扁率摄动下的轨道动力学方程

地球的真实形状是质量分布不均匀的不规则椭球体，导致地球的引力场也呈不规则分布。在某种程度上，可以把地球简化为均质椭球体。该椭球体在赤道地区半径长，两极地球半径短，如图 2 所示。

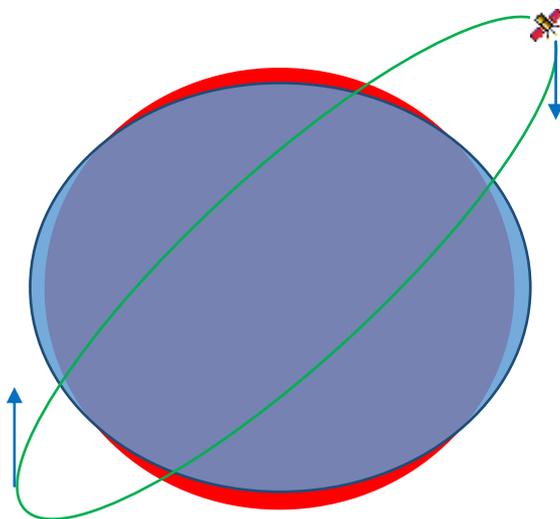


图 2 地球扁率摄动

地球扁率导致地球的引力场无法用质点引力场描述，地球扁率产生的引力场变化作用在卫星上，会导致卫星轨道偏离理想二体运动。

地球扁率摄动也称之为 J2 摄动。

J2 摄动会导致轨道根数发生长期漂移和周期振荡，需要用**瞬时轨道根数（或密切轨道根数）**描述轨道，如图 3 所示。瞬时轨道根数是根据瞬时位置和速度矢量按照理想二体问题确定的轨道根数。其物理意义：假如从当前点开始，所有摄动力消失，那么后续轨道将沿瞬时轨道根数运行。

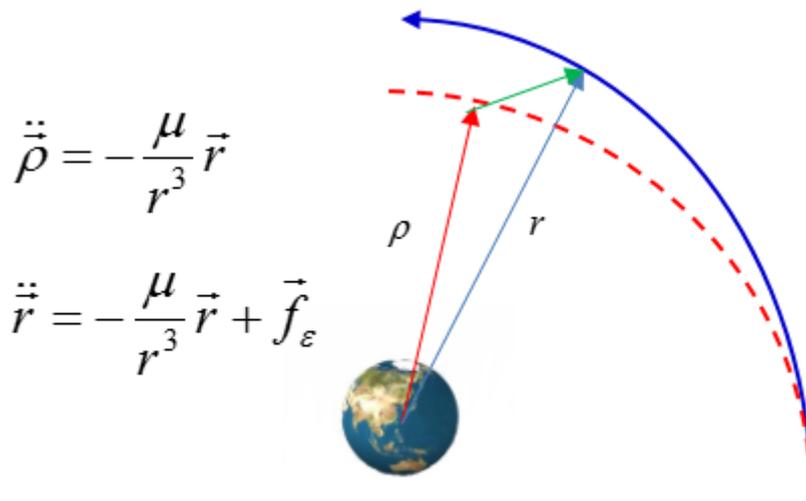


图 3 瞬时轨道根数

瞬时轨道根数中包含常值分量、长期分量、长周期分量和短周期分量。如果不考虑周期分量，仅考虑常值分量和长期分量，称为平均轨道根数。平均轨道根数能够表征地球扁率摄动影响下轨道的长期演化趋势。在本题目中，给出的空间碎片的轨道根数均为**瞬时轨道根数**。初始时刻的瞬时轨道根数是用来求解初始时刻的位置速度，代入(5)式后进行轨道递推，求解任意时刻的位置和速度。

在地球扁率 J2 项摄动影响下，在地球惯性坐标系下，飞行器的轨道动力学方程如下：

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{\mu x}{r^3} \left(1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 \left(1 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) \right) + \frac{T_x}{m} \\
\ddot{y} &= -\frac{\mu y}{r^3} \left(1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 \left(1 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) \right) + \frac{T_y}{m} \\
\ddot{z} &= -\frac{\mu z}{r^3} \left(1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 \left(3 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) \right) + \frac{T_z}{m} \\
\dot{m} &= \frac{T}{g_e I_{sp}}
\end{aligned} \tag{5}$$

其中， μ 为地球引力常数， R_E 为地球半径常数， J_2 为地球扁率摄动常数。飞行器在地心惯性坐标系的位置用 x, y, z 表示，速度用 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 表示， $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 为地心距。 m 为飞行器的质量， T_x, T_y, T_z 为施加在飞行器上推力的坐标分量，推力幅值 $T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}$ 。 g_e 为地球海平面的重力加速度， I_{sp} 为推进比冲（连续推进 $I_{sp} = 1000s$ ）。

对（5）式进行数值积分，就能够得到在 J2 摄动和连续推力作用下，任意时刻卫星的轨道运动数据。

如果推力利用速度脉冲 $\Delta v = [\Delta \dot{x} \quad \Delta \dot{y} \quad \Delta \dot{z}]$ 来近似表达，在速度脉冲施加的前后时刻 $(t_{\Delta v}^-, t_{\Delta v}^+)$ ，飞行器的位置不发生变化，速度发生瞬时变化：

$$\begin{cases} x(t_{\Delta v}^+) = x(t_{\Delta v}^-), y(t_{\Delta v}^+) = y(t_{\Delta v}^-), z(t_{\Delta v}^+) = z(t_{\Delta v}^-) \\ \dot{x}(t_{\Delta v}^+) = \dot{x}(t_{\Delta v}^-) + \Delta \dot{x}, y(t_{\Delta v}^+) = \dot{y}(t_{\Delta v}^-) + \Delta \dot{y}, z(t_{\Delta v}^+) = \dot{z}(t_{\Delta v}^-) + \Delta \dot{z} \end{cases} \tag{6}$$

不包含速度脉冲或连续推力的飞行轨道仍然遵循式的轨道动力学方程，但需要设定 $T_x = T_y = T_z = 0$ 。

3.3. 燃料消耗质量

探测器的推进方式有连续推进、脉冲推进和混合推进等三种方式，

可以任选一种。

(1) 连续推进

提供不超过 0.5N 的连续推力，推力幅值和方向可任意选择，发动机可任意开启或关闭。对 (5) 式进行积分就可以得到质量的变化，进而得到燃料消耗质量。

(2) 脉冲推进

速度脉冲的大小和方向可以任意选择，脉冲作用时刻和脉冲次数没有限制。每次脉冲推进后，燃料质量消耗 (kg) 为：

$$\Delta m = m \left(1 - e^{-\frac{\Delta v}{g_e I_{sp}}} \right) \quad (7)$$

m 为脉冲作用前飞行器的总重， Δv 为脉冲机动速度， I_{sp} 为脉冲推进比冲 ($I_{sp} = 300s$)。

(3) 混合推进

混合推进既能够以连续推进模式工作，也能够以脉冲推进模式工作，性能与单纯连续推进或脉冲推进相同。混合推进的使用约束参见下节。

4. 约束条件

(1) 初始状态约束

初始时刻飞行器位于 700km 高度的近地圆轨道上。瞬时轨道半长轴 $a = 7078.137km$ ，瞬时偏心率 $e = 0$ ，其他轨道根数（瞬时轨道倾角 i ，瞬时升交点经度 Ω ，瞬时近地点幅角 ω ，瞬时真近点角 f ）可以自由设置。

(2) 时间范围约束

初始时刻为修正儒略日 $MJD=58849$ ，总任务期限不大于 365 天，即结束时刻不晚于 $MJD=59214$ 。

(3) 交会约束

交会时，与目标碎片的相对位置误差不超过 1m，相对速度误差不超过 0.001m/s。交会后，飞行器与目标碎片具有相同的位置和速度。交会目标后，停留时间不少于 3600 秒。在飞向下一个目标之前，释放重量为 1kg 的碎片减缓装置。

(4) 质量约束

飞行器的总重 m_{all} 为 1000kg，由卫星干重 m_{dry} 、燃料 m_{feul} 和碎片减缓装置重量 $m_{migration}$ 三项构成。

$$m_{all} = m_{dry} + m_{feul} + m_{migration} \quad (8)$$

推进方式可选连续推进、脉冲推进或混合推进。如果推进方式选为连续推进或者脉冲推进，则卫星干重 $m_{dry} = 350kg$ 。如果推进系统选为混合推进，则卫星干重 $m_{dry} = 420kg$ 。

碎片减缓装置质量 $m_{migration}$ 根据交会碎片的数量自由配置，每交会一颗空间碎片，碎片减缓装置的质量增加 1kg。在没有交会任何碎片的条件下，碎片减缓装置的初始质量为 0。

燃料质量由总质量、飞行器干重和碎片减缓装置质量确定：

$$m_{feul} = m_{all} - m_{dry} - m_{migration} \circ$$

(5) 混合推进系统约束

对于混合推进系统，在从一颗目标碎片到下一颗目标碎片的转移

过程中，只允许使用一种推进模式，即连续推进或脉冲推进，不允许两种推进模式混合使用。完成交会空间碎片并释放碎片减缓装置后，可以自由选择是否切换推进模式，即可以从连续推进切换回脉冲推进，也可以从脉冲推进切换回连续推进。

5. 结果提交要求

(1) 以 pdf 或 word 提供一份设计说明文档。该文档简要介绍所用的方法并列设计结果，设计结果中至少包含如下信息：设计指标、所采用的推进方式、飞行器的初始状态（位置、速度）、交会碎片信息（编号、收益）等。同时，设计者需提供飞行轨道图。

(2) 地心惯性坐标系中的飞行器轨道数据文件（sc.txt）。为了提高设计结果验证效率，请务必参考示例文件的格式给出飞行器的轨道数据。所有数据均以双精度类型给出。示例轨道数据（sc.txt）将在题目发布一周内提供。

6. 常数

地球海平面的重力加速度： $g_e = 9.80665 \text{ m/s}^2$

1 天 = 86400 s

地球半径 $R_E = 6378.137 \text{ km}$

地球扁率摄动常数 $J_2 = 0.001082629989052$

地球引力常数 $\mu = 398600.4418 \text{ km}^2 / \text{s}^2$

7. 附录

7.1. 轨道根数转化为位置速度

已知轨道根数 $[a, e, i, \Omega, \omega, f]$ ，求在惯性坐标系下的位置和速度矢量 $[\vec{r}, \dot{\vec{r}}]$ 。

首先根据（9）式求出偏近点角 E 和平近点角 M ：

$$\begin{aligned} \tan \frac{f}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \\ M &= E - e \sin E \end{aligned} \quad (9)$$

然后根据（10）式，求矢量 \hat{P} 、 \hat{Q} ：

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i \\ \sin \omega \sin i \end{bmatrix} \\ \hat{Q} &= \begin{bmatrix} -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i \\ -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i \\ \cos \omega \sin i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

最后，求出位置和速度矢量：

$$\begin{aligned} \vec{r} &= a(\cos E - e)\hat{P} + a\sqrt{1-e^2} \sin E \hat{Q} \\ \dot{\vec{r}} &= \frac{\sqrt{\mu a}}{r} \left[-\sin E \hat{P} + \sqrt{1-e^2} \cos E \hat{Q} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

7.2. 参考文献

- 《航天动力学引论》 南京大学出版社
- 《空间飞行器动力学》 哈尔滨工业大学出版社
- 《卫星轨道姿态动力学与控制》 北京航空航天大学出版社